СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том III, № 3 Май — Июнь 1962 г.

В. Л. МАКАРОВ

ОБ УСЛОВИИ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА

В заметке рассматривается абстрактная экономическая модель производства в динамике с постоянными темпами. Модель M задается конечным множеством пар векторов (a_i, b_i), $i = 1,2, \ldots, n$, которые называются базисными процессами. Процесс (x, y), принадлежащий M, представляет собой неотрицательную линейную комбинацию базисных процессов, т. е.

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i, b_i), \ \lambda_i \geqslant 0.$$

Множитель λ_i называется интенсивностью i-го базисного процесса. n-мерный вектор p с неотрицательными компонентами называется вектором цен модели M.

Технологический (d_M) и экономический (β_m) темпы роста модели M определяются следующим образом:

$$\alpha_M = \max_{(x, y)} \min_{j} \frac{\eta_j}{\xi_j},$$

где η_j — j-ая компонента вектора y, ξ_j — j-компонента вектора x;

$$\beta_m = \min_{p} \max_{i} \frac{b_i p}{a_i p},$$

где (a_i, b_i) — i-й базисный процесс. Процесс $(\overline{x}, \overline{y})$, на котором достигается α_M, и вектор цен $\overline{p}_m$, на котором достигается β_m, называются оптимальными.

В статье ([1]) Д. Гейл выделил класс регулярных моделей, определяемых как такие модели, что для всякого оптимального процесса имеет место $y > \mathbf{0}$. Гейл показал, что для таких моделей выполняется равенство $\alpha_M = \beta_m$. Однако существуют нерегулярные модели, для которых это равенство также выполняется. В связи с этим Гейл поставил вопрос о нахождении достаточных условий для выполнения равенства $\alpha_M = \beta_m$, более слабых, чем условия регулярности.

Прежде чем сформулировать условие, которое, как будет показано, является необходимым и достаточным для выполнения равенства $\alpha_M = \beta_m$, сделаем несколько предварительных замечаний.

1) Легко указать более слабое достаточное условие, чем регулярность, а именно: среди оптимальных процессов найдется такой процесс (x, y), что $y > \mathbf{0}$. Мы будем называть модели, удовлетворяющие этому условию, *полурегулярными*. Достаточность полурегулярности модели доказывается в

точности как теорема 2 статьи ([1]), только вместо любого оптимального процесса следует брать именно тот, для которого $y > 0$.

2) Всякий оптимальный процесс в модели M, заданный вектором интенсивностей $v = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, определяет подмодель $M_v \leqslant M$, в которой базисными будут способы, соответствующие положительным интенсивностям. Обозначим через $M_{\max}$ подмодель M, порожденную оптимальным процессом, выпускающим максимальное число продуктов (т. е. таким процессом, у которого вектор выпуска y содержит максимальное число положительных компонент). Обозначим это число через k и, не умаляя общности, будем считать, что положительны первые k компонент.

3) Для данной модели M с помощью $M_{\max}$ можно получить некоторую условную модель M^1 следующим образом: из базисных способов выберем только те, которые не входят в $M_{\max}$, и в этих выбранных способах (т. е. парах векторов) вычеркнем те компоненты, которые положительны в оптимальном процессе, определяющем $M_{\max}$, т. е. первые k компонент. Полученные способы примем в качестве базисных для M^1. Для M^1 может и не выполняться то условие, что из $x = 0$ следует $y = 0$, поэтому технологический темп роста модели M^1 может быть и бесконечным. Аналогично для M^1 определяется $M^1_{\max}$ и соответственно M^2 и т. д. В конце концов, мы придем к некоторой полурегулярной модели M^s, и на этом процесс закончится, так как $M^s_{\max}$ совпадет с M^s (что процесс придет к полурегулярной модели, следует из предположения 3 статьи ([1])).

В дальнейшем индекс t у какого-либо вектора (или числа) будет обозначать, что данный вектор (число) имеет отношение к модели M_t.

Теорема. *Для того чтобы в модели M имело место равенство $\alpha_M = \beta_m$, необходимо и достаточно, чтобы ни один из $\alpha_{M^1}, \alpha_{M^2}, \ldots, \alpha_{M^s}$ не был меньше, чем α_M.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M не полурегулярна и $\alpha_M = \beta_m$. Покажем, что тогда,

$$\alpha_M \leqslant \alpha_{M}t, \quad t = 1, 2, \ldots, s.$$

Предположим противное, т. е. что для некоторой условной модели M^r

$$\alpha_M > \alpha_{M^r}.$$

На основании следствия 1 теоремы 1 цитированной статьи

$$\alpha_{M^r} \geqslant \beta_{m^r},$$

где $\beta_{m^r} = \min\limits_{p^r} \beta(p^r)$. Этот минимум достигается на некотором векторе $\overline{p}^r$.

Дополнив вектор $\overline{p}^r$ нулями слева, построим вектор $\overline{p}$ размерности n. Этот вектор будет вектором цен в модели M. Для этого вектора

$$\beta(\overline{p}) = \max_{(x, y)} \frac{y\overline{p}}{x\overline{p}} = \beta(\overline{p}^r),$$

так как продукты, имеющие положительные цены, не выпускаются базисными способами, которые не участвовали в модели M^r. Это следует из определения модели M^r. Теперь мы видим, что

$$\beta_m \leqslant \beta(\bar{p}) = \beta(\bar{p^r}) \leqslant \alpha_{M^r} < \alpha_M,$$

что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть M не полурегулярна и

$$\alpha_m \leqslant \alpha_{M^t}, \ t = 1, 2, \ldots, s.$$

Покажем, что при этом условии выполняется равенство $\alpha_M = \beta_m$. Предположим противное, т. е. что

$$\alpha_M > \beta_m.$$

Возьмем произвольный вектор цен p модели M. Так как любой из продуктов выпускается в одной из $M_{\max}, M^1_{\max}, \ldots, M^s_{\max}$, то среди них для данного p найдутся такие модели, которые выпускают хотя бы один из продуктов с положительной ценой. Пусть первая из таких моделей есть $M^r_{\max}$. Если $(\bar{x}^r, \bar{y}^r)$ есть оптимальный процесс модели M^r, который определяет $M^r_{\max}$, и p^r есть часть вектора p, относящаяся к M^r, то темп $\beta(\bar{x}^r, \bar{y}^r, p^r)$ определен и, следовательно, $\geqslant \alpha_{M^r}$. Векторы $\bar{x}^r$ и $\bar{y}^r$ есть части векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, определяющих процесс $(\bar{x}, \bar{y})$ модели M. Имеем

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, p) = \beta(\bar{x}^r, \bar{y}^r \ p^r) \geqslant \alpha_{M^r} \geqslant \alpha_M,$$

так как цены продуктов, не входящих в M^r, все равны нулю. Теперь мы видим, что, каков бы ни был вектор цен p, всегда найдется такой процесс $(\bar{x}, \bar{y})$, что

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, p) \geqslant \alpha_M,$$

что противоречит предположению.

Поступило
23.VI.1961

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гейл Д., Замкнутая линейная модель производства, Сборник «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, М., 1959, 382—400.